Instituto Tecnológico de Morelia

Repaso de álgebra lineal

M. C. Miguelangel Fraga Aguilar

Para aprender más ...

- Strang, Gilbert (2007). Álgebra lineal y sus aplicaciones. Ed. Thomson
- MIT opencourseware curso 18.06 http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/

  http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/

Vectores

- Vector columna

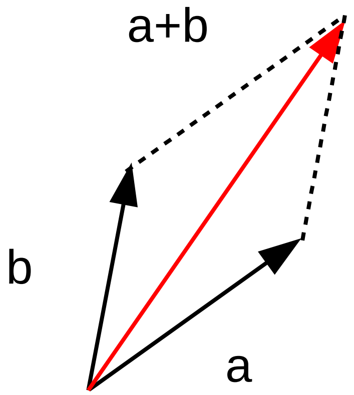
$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

- Vector renglón $\quad \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{T}}=[b_1\, b_2 \ldots b_n]$
- Multiplicación por un escalar $\quad c\,\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{T}}=[c\,b_1\, c\,b_2 \ldots c\,b_n]$
- Producto punto

$$\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{a}=[b_1\, b_2 \ldots b_n]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}=a_1 b_1+a_2 b_2+\ldots+a_n b_n$$

Vectores (2)

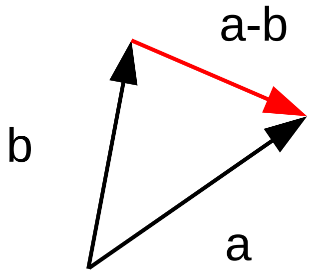
- Suma de vectores



$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=[a_1+b_1\, a_2+b_2 \ldots a_n+b_n]$$

- Resta de vectores

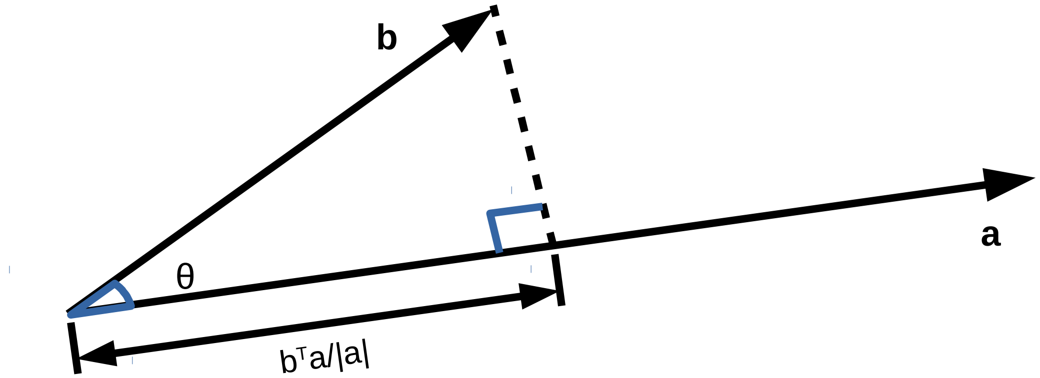
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=[a_1-b_1\, a_2-b_2 \ldots a_n-b_n]$$



- Combinación lineal

$$\boldsymbol{b}=c_1\boldsymbol{v_1}+c_2\boldsymbol{v_2}+\ldots+c_n\boldsymbol{v_n}$$

Interpretación geométrica del producto punto



$$\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{a} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos(\theta)$$

$$|\boldsymbol{a}|^2 = a_1 a_1 + a_2 a_2 + \ldots + a_n a_n = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{a}$$

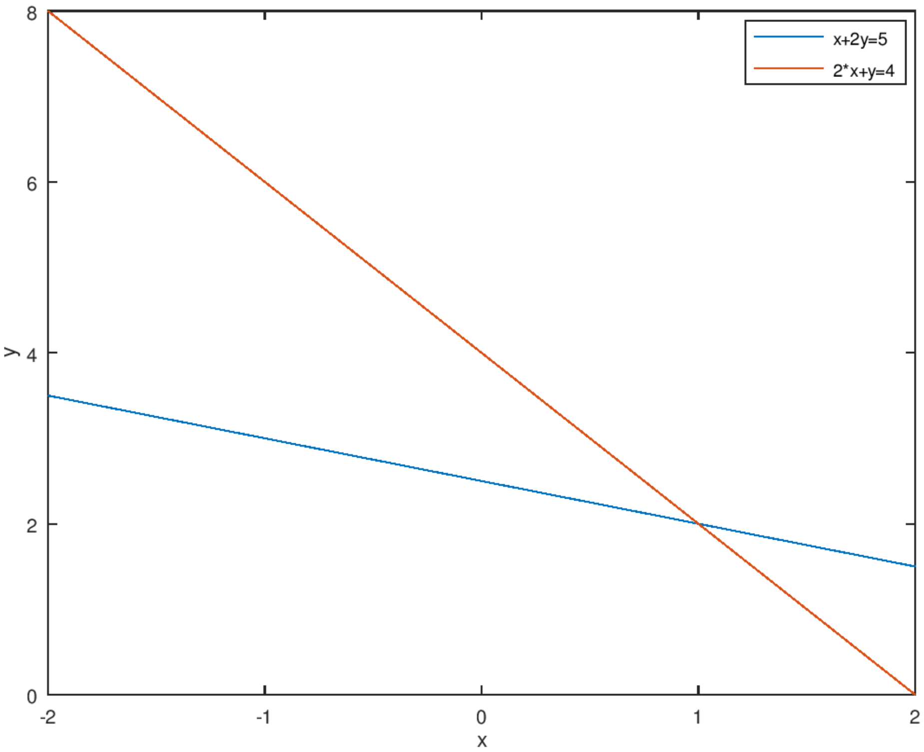
$$\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

Son ortogonales

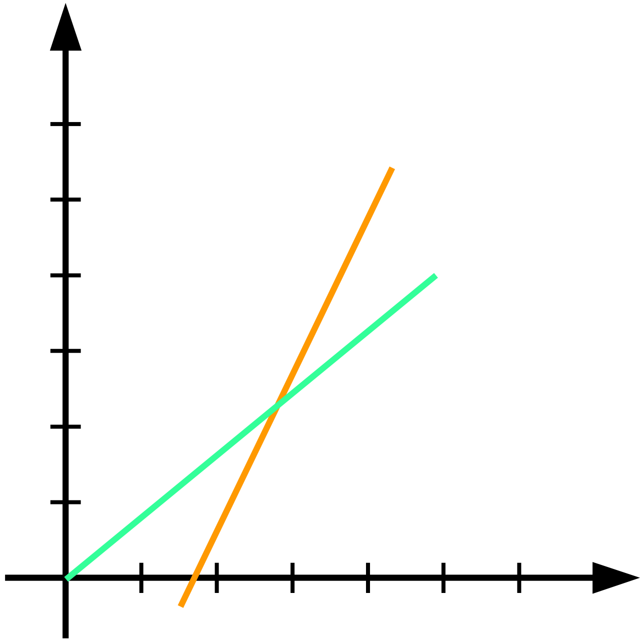
Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (imagen por renglones)

$$1x+2y=5$$
$$2x+1y=4$$

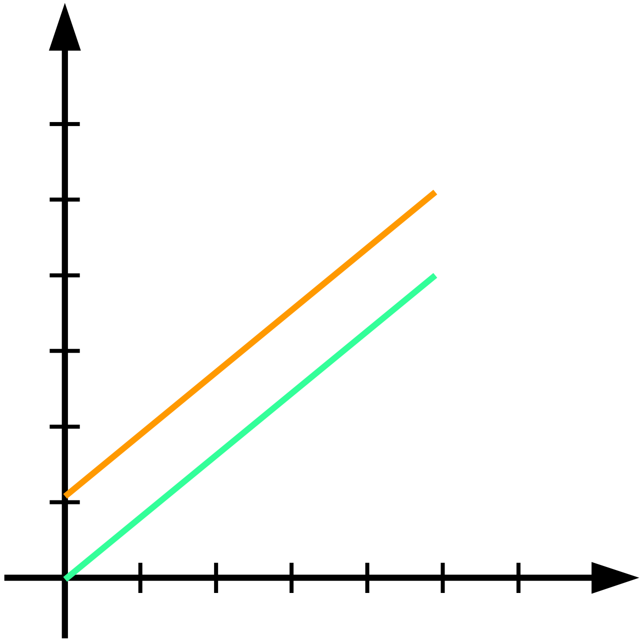
```
x=linspace(-2,2,20);
plot(x,(5-x)/2,x,4-2*x)
xlabel('x'),ylabel('y')
legend('x+2y=5','2*x+y=4')
```



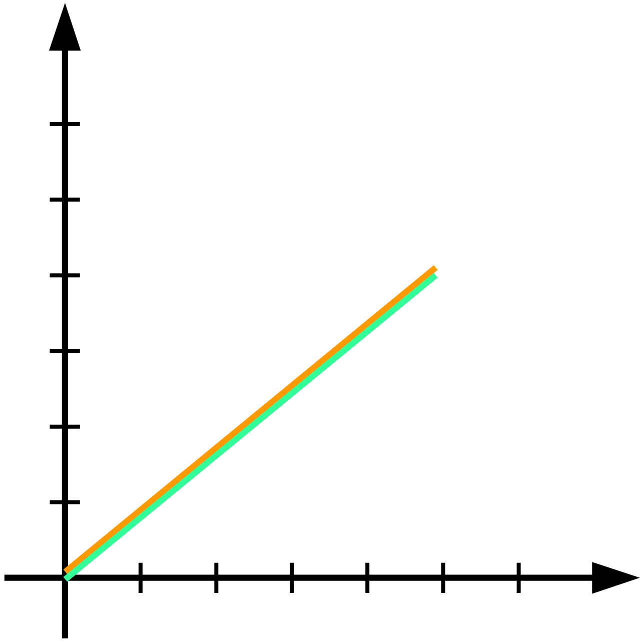
Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas
Resultados posibles



Una sola solución

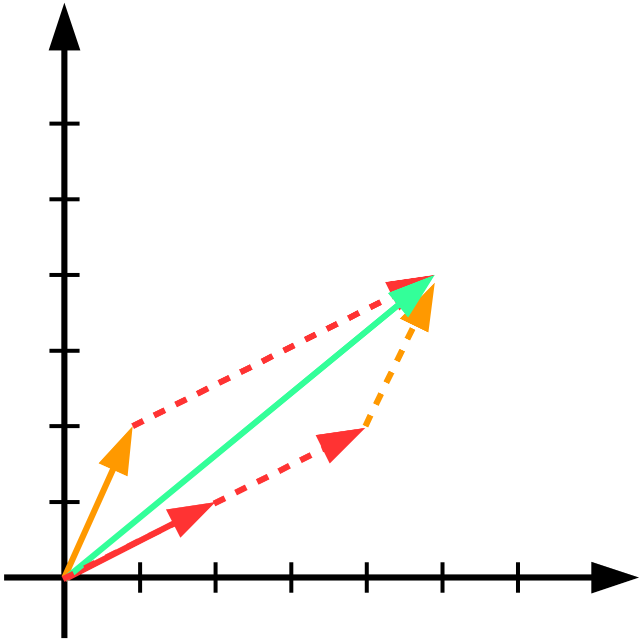


No hay solución



Toda una recta de solución

Sistema de dos ecuaciones (imagen por vectores columna)



$$1\,x+2\,y=5$$
$$2\,x+1\,y=4$$

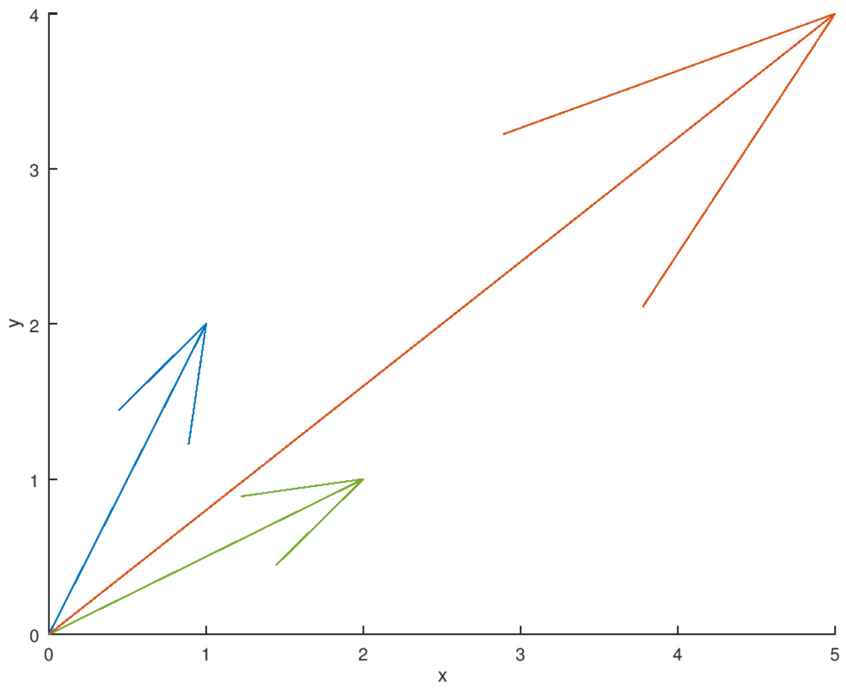
$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$$

$$x=1 \quad y=2$$

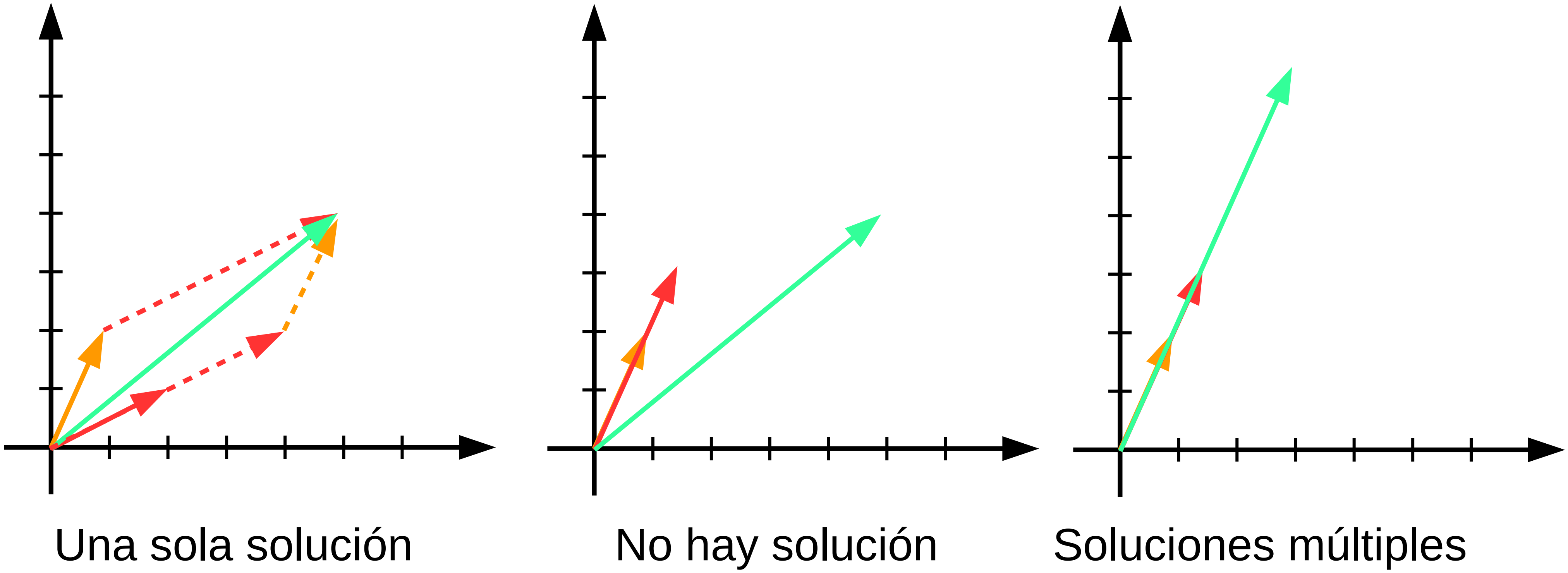
$$\begin{bmatrix}1\,x+2\,y\\2\,x+1\,y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$$

Imagen por columnas en octave

```
c1=[1;2]
c2=[2;1]
b=c1+2*c2
hold on
quiver(0,0,c1(1),c1(2))
quiver(0,0,c2(1),c2(2))
quiver(0,0,b(1),b(2))
hold off
xlabel('x'),ylabel('y')
```



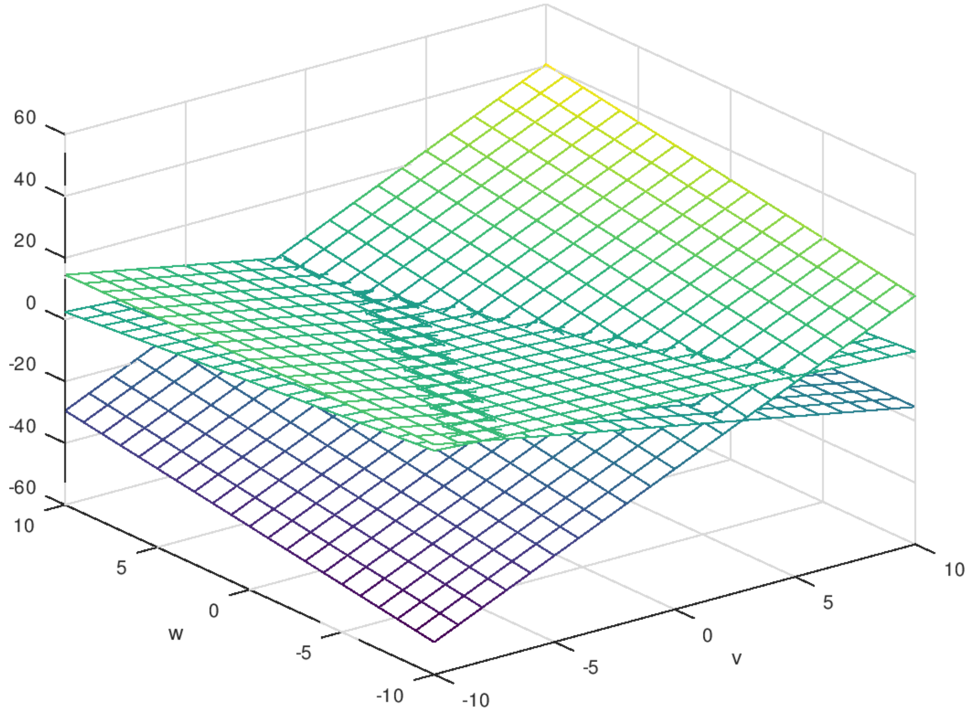
Casos posibles
(imagen por vectores columna)



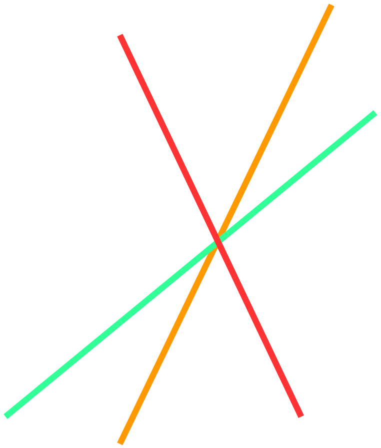
Sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (imagen por renglones)

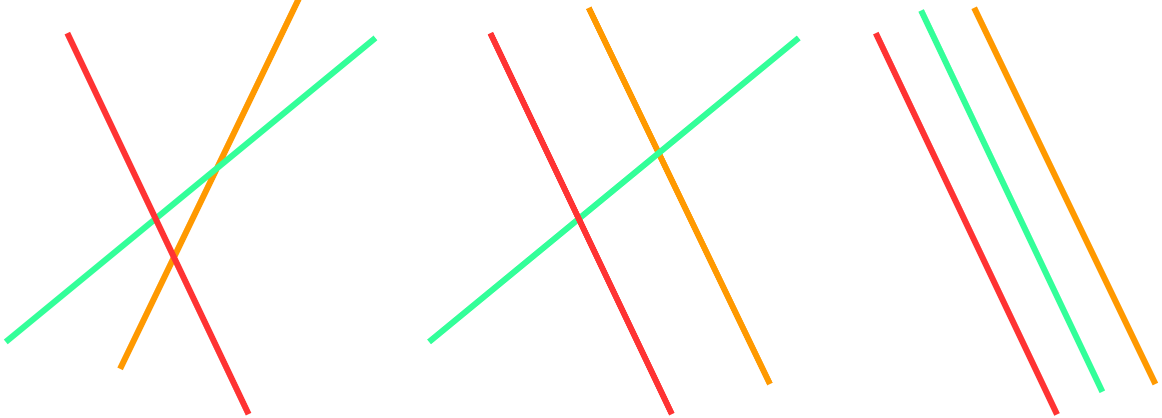
$$2u+v+w=5$$
$$4u-6v=-2$$
$$-2u+7v+2w=9$$

```
[VV,WW]=meshgrid(-10:10,-10:10);
UU1=(5-VV-WW)/2;
UU2=(-2-6*VV)/4;
UU3=(9-7*VV-2*WW)/(-2);
mesh(VV,WW,UU1);
hold on;
mesh(VV,WW,UU2);
mesh(VV,WW,UU3);
hold off;
xlabel('v'),ylabel('w');
```



Sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas
Resultados posibles

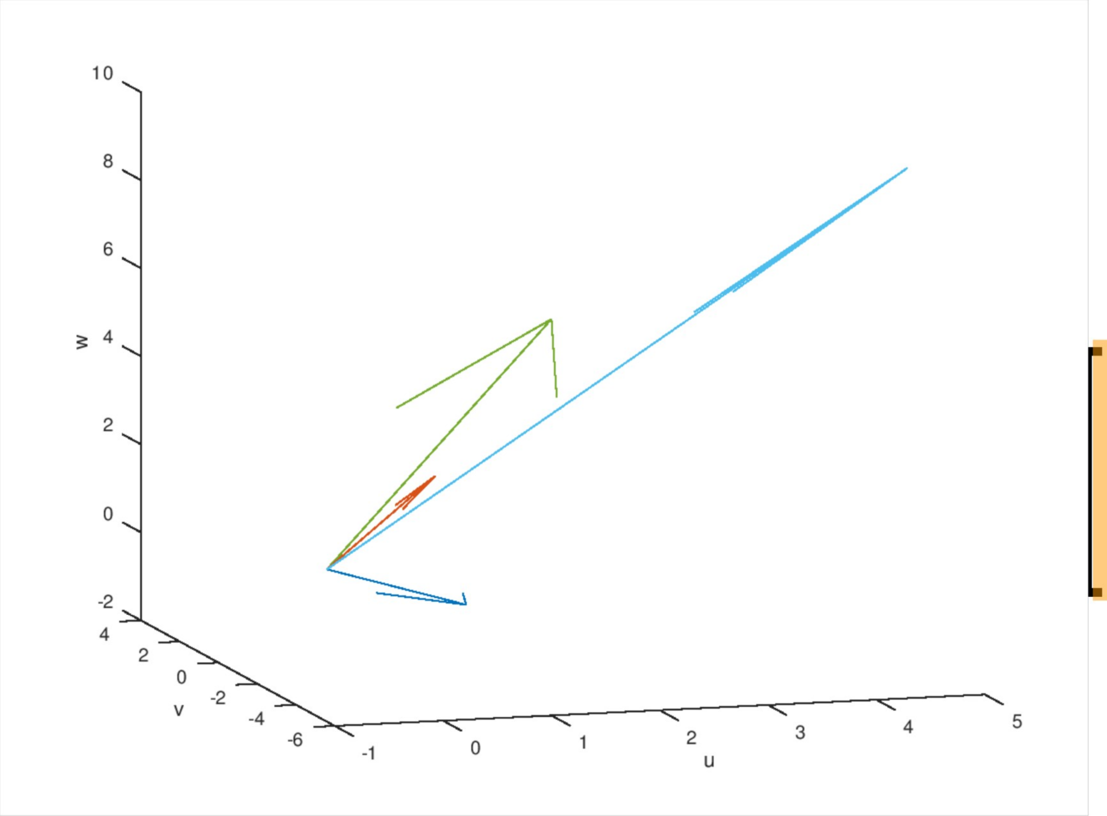




Infinidad de soluciones
Recta o plano de intersección

No hay solución

Sistema de tres ecuaciones (imagen por vectores columna)



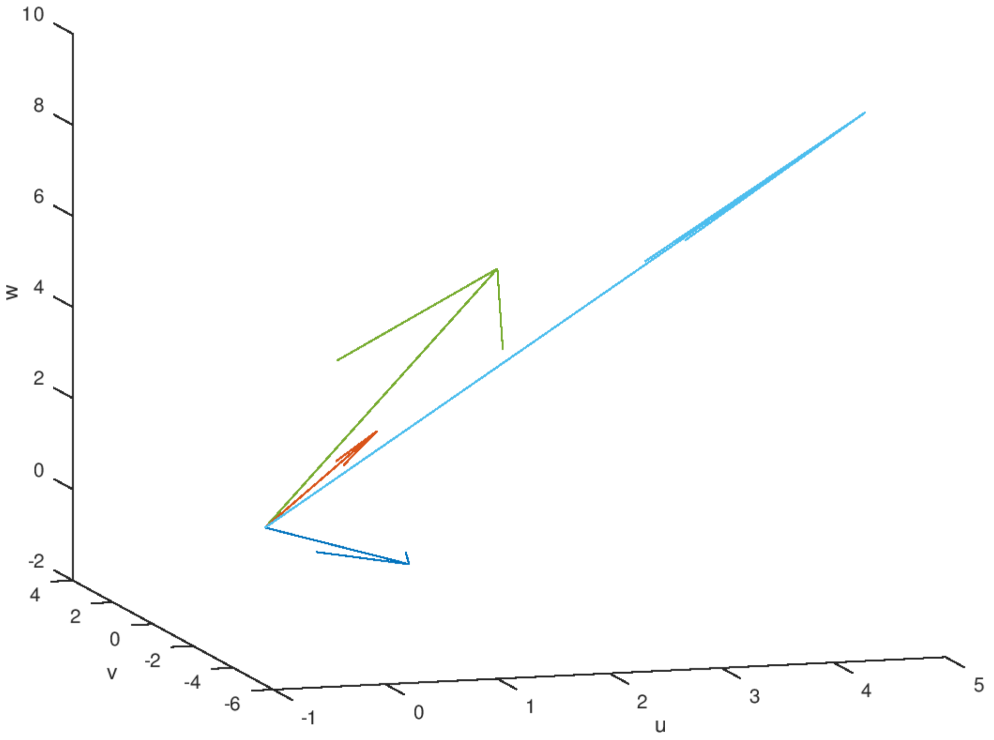
$$
\begin{aligned}
2u + v + w &= 5\\
4u - 6v &= -2\\
-2u + 7v + 2w &= 9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} w = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}
$$

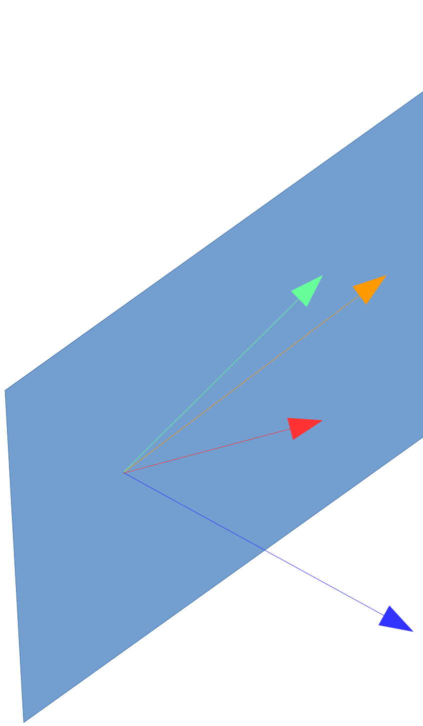
$$
u=1 \quad v=1 \quad y=2
$$

Imagen por columnas en octave

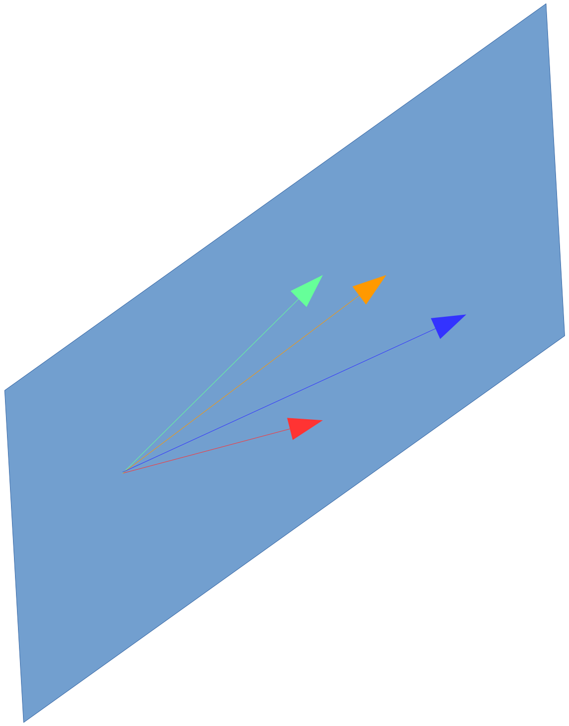
```
c1=[2;4;-2]
c2=[1;-6;7]
c3=[1;0;2]
b=c1+c2+2*c3
hold on
quiver3(0,0,0,c1(1),c1(2),c1(3))
quiver3(0,0,0,c2(1),c2(2),c2(3))
quiver3(0,0,0,c3(1),c3(2),c3(3))
quiver3(0,0,0,b(1),b(2),b(3))
hold off
xlabel('u'),ylabel('v'),zlabel('w');
```



Casos posibles
(imagen por columnas)



No hay solución



Infinidad de soluciones

Sistema de dos ecuaciones con una matriz

$$\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\,x+2\,y\\4\,x+5\,y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$

- El sistema de dos ecuaciones puede verse como una ecuación con coeficientes vectoriales
- Los vectores columna pueden agruparse en un vector renglón (matriz)
- El producto de la matriz por el vector de incógnitas es un vector que debe ser igual al vector de términos independientes

Matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Matrices (2)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \text{Columna 1} & & & & \text{Columna n} \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{renglón 1} \\ \\ \\ \text{renglón n} \end{array} \end{array}$$

Multiplicación matriz por vector

- Por renglones: renglón por columna

$$A\,\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\ 11\\ 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 10+2\cdot 11+3\cdot 12\\ 4\cdot 10+5\cdot 11+6\cdot 12\\ 7\cdot 10+8\cdot 11+9\cdot 12\end{bmatrix}$$

- Por columnas: combinación lineal de columnas

$$A\,\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\ 11\\ 12\end{bmatrix}=10\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 7\end{bmatrix}+11\begin{bmatrix}2\\ 5\\ 8\end{bmatrix}+12\begin{bmatrix}3\\ 6\\ 9\end{bmatrix}$$

Multiplicación matriz por vector (2)

- A**x** es una combinación lineal de las columnas de A
- Los componentes de x son los coeficientes de la combinación
- Resolver un sistema A**x**=**b** equivale a encontrar los coeficientes de la combinación de las columnas de A que es igual a **b**
- La i-esima componente de A**x** es

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$$

Producto punto del renglón i por **x**

Matriz por vector renglón

- Renglón por columna

$$\boldsymbol{x}^T A = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10\cdot1+11\cdot4+12\cdot7 & 10\cdot2+11\cdot5+12\cdot8 & 10\cdot3+11\cdot6+12\cdot9 \end{bmatrix}$$

- Combinación lineal de renglones

$$\boldsymbol{x}^T A = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$10\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + 11\cdot\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + 12\cdot\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices (por columnas)

- Para poder calcular AB, el numero de columnas de A debe ser igual al numero de renglones de B

$$AB = A\begin{bmatrix} \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{b_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{b_1} & A\boldsymbol{b_2} & A\boldsymbol{b_3} \end{bmatrix}$$

- Cada columna de AB es una combinación lineal de las columnas de A. Los componentes de cada columna de B son los coeficientes de combinación

Multiplicación de matrices (por renglones)

- El elemento i,j de AB es el producto punto del i-esimo renglón de A por la j-esima columna de B

$$(AB)_{3,2} = a_{3,1} b_{1,2} + a_{3,2} b_{2,2} + a_{3,3} b_{3,2}$$

- Cada renglón de AB es el producto de un renglón de A por B, una combinación lineal de los renglones de B con coeficientes dados por el renglón de A

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{B}1} \\ \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{B}2} \\ \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{B}3} \end{bmatrix} = a_{11} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{B}1} + a_{12} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{B}2} + a_{13} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{B}3}$$

Multiplicación de matrices Dimensiones

- Para que se pueda calcular el producto AB, el numero de columnas de A debe ser igual al numero de renglones de B. El numero de renglones del producto es igual al de renglones de A y el numero de columnas del producto es igual al de columnas de B.

$$\underset{N_1 x M_1}{A} \; \underset{N_2 x M_2}{B} = \underset{N_1 x M_2}{A\,B}$$

$$M_1 = N_2$$

Producto exterior

- Equivale al producto matricial de un vector columna por un vector renglón, el resultado es una matriz cuyos elementos son los productos de todas las combinaciones de los elementos de los vectores. Ej.:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & ae & af \\ bd & be & bf \\ cd & ce & cf \end{bmatrix}$$

Matriz identidad

- El producto de una matriz por la matriz identidad es igual a la matriz original
- AI=IA=A

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonal Principal

Matriz de diagonal o de escala

- Solo los elementos de la diagonal principal son distintos de 0

$$D=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_2 a_{12} \\ d_1 a_{21} & d_2 a_{22} \end{bmatrix}$$

Matriz de permutación

- Solo un elemento es uno en cada renglón y columna, los demás son cero

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix}$$

Eliminación gaussiana

- Consiste en restar múltiplos de la primera ecuación a las otras con el objetivo de eliminar una variable de las ultimas ecuaciones

$$2u+v+w=5$$
$$4u-6v=-2$$
$$-2u+7v+2w=9$$

- Restando 2 veces la primera ecuación a la segunda y restando -1 veces la primera ecuación a la tercera

$$2u+v+w=5$$
$$-8v-2w=-12$$
$$8v+3w=14$$

Pivotes y multiplicadores para eliminación

- Pivote para la columna 1
- Múltiplo para la ecuación 2: 4/2=2
- Múltiplo para la ecuación 3: -2/2=-1
- Pivote para la columna 2
- Múltiplo para la ecuación 3: 8/(-8)=-1

$$\begin{aligned} 2u+v+w&=5\\ 4u-6v&=-2\\ -2u+7v+2w&=9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2u+1v+w&=5\\ -8v-2w&=-12\\ 8v+3w&=14 \end{aligned}$$

- Una vez obtenido una sola variable en la Ec. 3, sustituir su valor en la Ec. 2

$$\begin{aligned} 2u+v+w&=5\\ -8v-2w&=-12\\ w&=2 \end{aligned}$$

Eliminación gaussiana en notación de matriz extendida

- Se extiende la matriz de coeficientes con el vector de términos independientes, se omite el vector de incógnitas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{array}\right] \Rightarrow$$

Matriz triangular superior

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Fallas en la eliminación gaussiana intercambio de renglones

- Los pivotes no deben ser cero, ya que hay que dividir entre ellos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 2 & 2 & 5 & \ldots \\ 4 & 6 & 8 & \ldots \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 3 & \ldots \\ 0 & 2 & 4 & \ldots \end{bmatrix}$$

- Solución: intercambio de los renglones 2 y 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 3 & \ldots \\ 0 & 2 & 4 & \ldots \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 2 & 4 & \ldots \\ 0 & 0 & 3 & \ldots \end{bmatrix}$$

Fallas en la eliminación gaussiana
Caso singular

- En algunos casos el intercambio de renglones no resuelve el problema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 2 & 2 & 5 & \dots \\ 4 & 4 & 8 & \dots \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 4 & \dots \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

- Caso 1: No existe solución, Caso 2: Soluciones múltiples

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma matricial del paso de eliminación gaussiana

- E resta 2 veces la primera ecuación a la segunda, F resta -1 veces el renglón 1 al renglón 3

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad F=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- El producto efectuá ambas operaciones y es conmutativo (cuando cada operación afecte a un renglón diferente)

$$EF=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=FE$$

Paso de eliminación Gaussiana sobre la primera columna

1.3 y 1.4

Forma matricial del paso de eliminación gaussiana (2)

- G resta -1 veces la segunda ecuación a la tercera

$$G=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

- La matriz triangular superior U puede obtenerse directamente por el producto GFEA=U

$$GFEA=U$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 4 & -6 & 0\\ -2 & 7 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -8 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Inversas de las matrices de eliminación gaussiana

- Una operación de resta se deshace con una de suma

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad E^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

- Se puede recuperar A desde U multiplicando por las inversas de G, F, y E

$$A=\left(E^{-1}F^{-1}G^{-1}\right)GFEA=\left(E^{-1}F^{-1}G^{-1}\right)U=LU$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&1\\0&-8&-2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1\\4&-6&0\\-2&7&2\end{bmatrix}$$

Factorización A=LU

- $$L=(E^{-1}F^{-1}G^{-1})$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- La matriz L se puede calcular directamente comenzando con la identidad y almacenado los múltiplicadores de la eliminación gaussiana el los elementos debajo de la diagonal principal

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Múltiplos de la primera columna

Múltiplo de la segunda columna

Solución de un sistema de ecuaciones por factorización A=LU

- $$A\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$
  $$LU\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$
- Se propone un nuevo vector **c**: $\boldsymbol{c}=U\,\boldsymbol{x}$
- El sistema original queda como $L\,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$
- Puede resolverse **c** por sustitución hacia adelante por ser L triangular inferior
- Debido a que U es triangular superior, puede encontrarse **x** por sustitución hacia atrás a partir de $U\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$

Factorización A=LDV

- A=LU no es simétrica, L tiene unos en la diagonal principal y U tiene a los pivotes
- U se puede factorizar como U=DV donde D es una matriz con los pivotes en su diagonal V es triangular superior con unos en su diagonal principal

$$U=DV=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_{31} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & U_{12}/d_1 & U_{13}/d_1 \\ 0 & 1 & U_{23}/d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Intercambio de renglones Factorización PA=LU

- En el proceso de eliminación gaussiana pueden aparecer ceros en la diagonal principal (pivote = 0), lo que en algunos casos puede resolverse con un intercambio de renglones (o varios)
- Dichos intercambios de renglones pueden incorporarse en la factorización LU como una matriz de permutación P que multiplica a la matriz original A, dejando los renglones de A en el orden requerido para que no aparezcan ceros en la diagonal
- En el caso singular ninguna P puede producir un conjunto completo de pivotes

Propiedades de una matriz de permutación

- P tiene los mismos renglones de la matriz identidad, pero en un orden diferente
- Existen n! permutaciones de tamaño n
- $P^{-1} = P^T$
- Computacionalmente una permutación suele almacenarse como un vector con los indices enteros de los renglones en el orden de la permutacion: Ej. p=[3 1 2] equivale a

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Consideraciones computacionales

- El error de redondeo puede hacer que el resultado de algunas divisiones se trunque a cero, lo que ocurre con menos frecuencia al se mayor la magnitud del divisor
- Por esa razón muchas implementaciones buscan el elemento de mayor valor absoluto en la columna que se esta eliminando y se intercambian los renglones para que quede dicho elemento en la diagonal principal
- Factorización LU en octave: [L,U,P]=lu(A)

Matriz inversa

- La matriz inversa de una matriz de nxn es otra matriz de nxn
- El producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad
- $A^{-1} A = A A^{-1} = I$
- Si $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$
- Cuando A**x**=**0** y **x** es diferente de 0 no es posible que exista una inversa (A es singular)
- Matriz de 2x2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Matriz inversa (2)

- La inversa de una matriz diagonal

$$D=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \quad D^{-1}=\begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_3 \end{bmatrix}$$

- Inversa del producto de dos matrices invertibles

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

Calculo de la matriz inversa

- El calculo de la inversa es equivalente a resolver n sistemas de n ecuaciones
- La factorización LU agiliza el calculo

$$A A^{-1} = I$$

$$A \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

$$A\,\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$$

$$A\,\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2$$

$$A\,\mathbf{x}_3 = \mathbf{e}_3$$

Método de Gauss-Jordan

- Se comienza con la matriz extendida con la identidad y se aplica eliminación gaussiana hasta transformar A en triangular superior.
- El vez de hacer eliminación hacia atrás, se continua aplicando eliminación para obtener ceros en los renglones sobre la diagonal principal
- Se dividen los renglones entre los elementos de la diagonal principal para que A termine por transformarse en la identidad y la identidad en la inversa

Método de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 0 & \frac{12}{8} & \frac{-5}{8} & \frac{-6}{8} \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{12}{16} & \frac{-5}{16} & \frac{-6}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{8} & \frac{-3}{8} & \frac{-2}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Consideraciones practicas

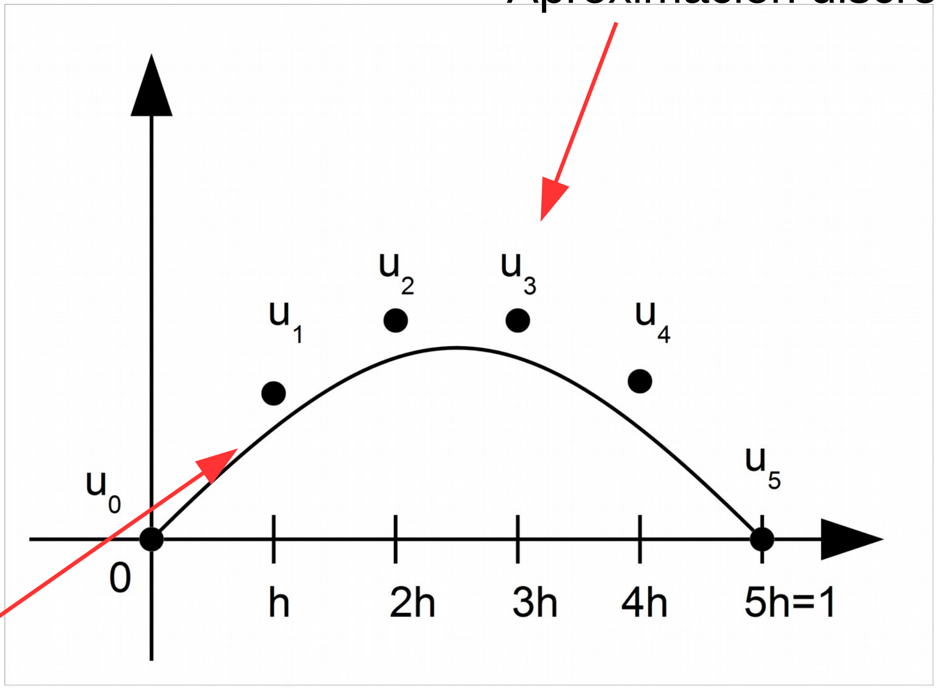
- Calcular el inverso de una matriz toma n^3 operaciones de multiplicación
- Multiplicar dos matrices de nxn requiere también de n^3 operaciones de multiplicación
- Resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas por eliminación y sustitución hacia atrás solo $n^3/3$ operaciones de multiplicación
- Casi nunca es realmente necesario calcular A^{-1}

Matriz transpuesta

- La transpuesta (A^T) de una matriz A es la que se forma usando las columnas de A como renglones de A^T
- Los elementos de la transpuesta están dados por $A_{ij} = A_{ji}$
- Transpuesta de un producto $(AB)^T = B^T A^T$
- Transpuesta de la inversa $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- Matriz simétrica $A^T = A$
- Si R es rectangular $R^T R$ es simetrica
- Si A es simétrica su factorizacion A=LDU es $A = LDL^T$

Aplicaciones
Diferencias finitas

- El metodo de diferencias finitas permite aproximar un problema de ecuaciones diferenciales por medio de un problema discreto en puntos igualmente espaciados



Aproximación de la derivada por diferencias finitas

$$\frac{du}{dx}=\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=\frac{u(x)-u(x-h)}{h}$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$$

Ejemplo diferencias finitas

- Problema continuo

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=f(x)$$
$$u(0)=u(1)=0$$

- Problema discreto

$$\frac{-u_{j+1}+2u_j-u_{j-1}}{h^2}=f(jh)$$
$$para\ j=1,\dots,n-1$$
$$u_0=0,\ \ u_n=0$$

- Forma matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}=h^2\begin{bmatrix} f(h) \\ f(2h) \\ f(3h) \\ f(4h) \end{bmatrix}$$

- La matriz de coeficientes es tridiagonal, simetrica y definida positiva
- Factorización de Cholesky

$$A=L\,L^T$$